



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)	
Resumen de la Unidad:	El estudiante aprenderá y aplicará las leyes de senos y cosenos.
Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)	
<p>PE1 ¿Por qué el Teorema de Pitágoras no aplica a todos los triángulos? CD1 El Teorema de Pitágoras solamente funciona cuando tienes un triángulo recto, pero las leyes de los senos y cosenos brindan la misma información para cualquier triángulo.</p> <p>PE2 ¿Cómo averiguamos los lados y ángulos que faltan de un triángulo si ya conocemos dos lados y un ángulo? CD2 La ley de senos se puede usar para resolver triángulos.</p> <p>PE3 ¿Cómo averiguamos los ángulos de un triángulo si ya conocemos todos sus lados? CD3 La ley de cosenos se puede usar para resolver triángulos.</p>	
Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)	
T1. El estudiante usará las leyes de seno y coseno para resolver problemas que involucren triángulos.	
<i>El estudiante adquiere destrezas para...</i>	
A1. Utiliza la ley de senos para investigar los ángulos de un triángulo cuando se conocen dos de sus lados y uno de sus ángulos opuestos.	
A2. Utiliza la ley de los cosenos para determinar los ángulos en un triángulo cuando se conocen sus tres lados.	
A3. Utiliza las leyes de los senos y cosenos juntas para resolver triángulos.	
A4. Aplica las leyes de los senos y cosenos en aplicaciones de la vida diaria.	
Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)	
Estándar de Geometría	
(+) ES.G.39.1	Determina la fórmula $A = (1/2) ab \sin(C)$ para el área de un triángulo y dibuja una recta auxiliar desde el vértice perpendicularmente hasta el lado opuesto.
(+) ES.G.39.2	Demuestra las leyes del seno y del coseno y las usa para resolver problemas.
(+) ES.G.39.3	Conoce y aplica la ley del seno y la ley del coseno para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y triángulos oblicuos (que no son rectángulos) (ejemplo. problemas de planimetría, fuerzas resultantes).



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)	
PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: (+) ES.G.39.1 (+)ES.G.39.2 (+)ES.G.39.3</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM6 PM7</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: A1/A2/A3/A4</p>	<ul style="list-style-type: none"> Cómo examinar la ley de seno y la ley de coseno para averiguar los lados y ángulos de triángulos. Cómo demostrar como las leyes de senos y cosenos se relacionan al Teorema de Pitágoras. Cómo evaluar las leyes de senos y cosenos en aplicaciones del mundo real. 	<p><i>Formas geométricas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Utilizar la ley de senos ALA para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y oblicuos. Utilizar la ley de senos LLA para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y oblicuos Resolver problemas utilizando ley de senos para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y oblicuos en situaciones de la vida diaria como la agrimensura. Utilizar la ley de 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Evaluación del trabajo de los estudiantes</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes demostrarán su conocimiento de las leyes de seno y coseno al evaluar el trabajo de otros estudiantes. (ver abajo) <p>(Fuente: http://www.amaps.org/leftfiles/Syllabi/Algebra%202%20Sample%20Tasks.pdf)</p> <p><i>Laberinto de triángulo</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes demostrarán su comprensión de la ley de senos y la ley de cosenos, trabajarán como arquitectos paisajistas que han 	<p><i>Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Estas visitando a tu primo, Luis, en Nueva York. Luis está planificando construirle un techo nuevo a su garaje. Decide inclinar los lados del tejado a un ángulo de 28°; el diámetro del garaje es de 30 pies. Halla la longitud de los lados del techo a la décima de pie más próxima. <div style="text-align: center;"> </div> <p>(Fuente: http://www.amaps.org/leftfiles/Syllabi/Algebra%202%20Sample%20Tasks.pdf)</p> <ul style="list-style-type: none"> Suponer que un triángulo tiene 30 grados de ángulo A. El lado opuesto A tiene un largo de 20 y uno de los lados adyacentes tiene un largo de 16. Use la ley de los senos para encontrar los lados y ángulos restantes del triángulo. Ahora supón que el lado opuesto tiene un largo de 7 y el lado adyacente tiene un largo de 16. ¿Puedes completar el triángulo? Finalmente, suponga que el lado opuesto tiene un largo de 10 y el 	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p><i>Leyes del seno y del coseno</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes resumen cómo hallar los lados y ángulos desconocidos en los triángulos no rectángulos. Comparan el seno y el coseno y cuándo usar cada regla a la hora de hallar las longitudes de lados que faltan, así como las medidas de los ángulos. (ver anejo: "TR.6 Actividad de Aprendizaje- Leyes del seno y coseno") <p>(Fuente: http://www.wsfcs.k12.nc.us/Page/7246)</p> <p><i>Leyes trigonométricas usando mapas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes utilizan mapas para determinar si hace falta usar leyes trigonométricas y cómo se usan. (ver abajo) <p>(Fuente: https://mcla.digication.com/5127/Lesson_Plan-Law_of_Sine_and_Cosine)</p> <p><i>Ejemplo 1 para planes de la lección: Las leyes de seno y coseno ¡simplificadas!</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Esta actividad está diseñada para expandir el conocimiento de trigonometría usando la ley de senos y la ley de cosenos. Los estudiantes elaborarán una herramienta de trigonometría



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
		<p>cosenos LAL para hallar medidas desconocidas del tercer lado en triángulos rectángulos y oblicuos.</p> <ul style="list-style-type: none"> Utilizar la ley de cosenos LLL para hallar la medida de cualquiera de sus ángulos en triángulos rectángulos y oblicuos. Resolver problemas utilizando ley de cosenos para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y oblicuos en situaciones de la vida diaria como la agrimensura. 	<p>recibido la tarea de diseñar un laberinto al aire libre para un parque de diversiones. (ver abajo)</p> <p>(Fuente: www.curriculumframer.com)</p>	<p>lado adyacente tiene un largo de 16. ¿Cuántos triángulos caben en esta descripción?</p> <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Busque en línea una prueba de la ley de los senos. Trate de explicar la prueba en palabras, y luego trate de explicar la prueba a otra persona que nunca antes la había visto. <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i></p> <p>Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En la clase de hoy aprendí _____. Hoy estuve confundido con _____. 	<p>de triángulos para ayudarlos a visualizar las leyes de trigonometría. (ver abajo)</p> <p>(Fuente: http://www.uen.org/Lessonplan/preview?LPid=19845)</p> <p><i>Desarrollar ley de cosenos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes explorarán las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de los triángulos, guiados por la ley de cosenos. (ver abajo) <p>(Fuente: http://www.mde.k12.ms.us/ACAD/ID/Curriculum/Framer/units/template_233.html)</p>



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
		<ul style="list-style-type: none">Hallar el área de un triángulo dado dos lados y el ángulo comprendido entre ellos usando la formula $A = (1/2) ab \sin C$ y dibuja una recta auxiliar desde el vértice perpendicular hasta el lado opuesto.Resolver problemas utilizando la ley de senos y cosenos para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y oblicuos en situaciones de la vida diaria como la agrimensura.			



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
Vocabulario de Contenido					
<ul style="list-style-type: none">• Ley de seno• Ley de coseno• Triángulo Obtusangulo• Triángulo Acutangulo					



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)

Conexiones a la literatura sugeridas

- **Martin Plimmer**
 - Más allá de la coincidencia
- **Juan Carlos Arce**
 - *El matemático del rey*
- **Marcus Du Sautoy**
 - *La música de los números primos: El enigma de un problema matemático abierto*
- **Eli Maor**
 - *Trigonometric Delights*
- **Ian Stewart**
 - *Letters of a Young Mathematician*

Recursos adicionales

- <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/medellin/nivelacion/uv00004/lecciones/unidades/generalidades/vectores/concepto/index12.htm>
- http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/ley_sen/leySenos.html



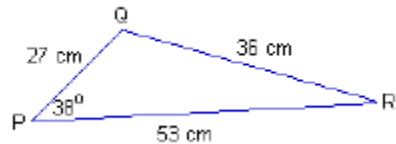
Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos
Matemáticas
6 semanas de instrucción

Tareas de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Titulo III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

Evaluación del trabajo de los estudiantes

- Los estudiantes demostrarán su conocimiento de las leyes de seno y coseno al evaluar el trabajo de otros estudiantes. Analizarán el trabajo de otros estudiantes para determinar quién sacó la respuesta correcta, y entregarán un informe.
- Tarea:
- Dos estudiantes de la clase de la Srta. Rivera trabajaron en el problema a continuación y obtuvieron soluciones distintas. ¿Quién obtuvo la respuesta correcta? Explica tu respuesta en detalle.
- Dado el triángulo PQR, halla el ángulo mayor al grado más cercano.



Estudiante no. 1

$$\frac{\text{sen}(38^\circ)}{36} = \frac{\text{sen}(\angle R)}{27}$$

$$36\text{sen}(\angle R) = 27\text{sen}(38^\circ)$$

$$m \angle R = \text{sen}^{-1}\left(\frac{27\text{sen}(38^\circ)}{36}\right)$$

$$m \angle R = 27.5$$

$$m \angle Q = 180 - 38 - 27.5$$

$$m \angle Q = 115^\circ$$

Estudiante no. 2

$$\frac{\text{sen}(38^\circ)}{36} = \frac{\text{sen}(\angle Q)}{53}$$

$$36\text{sen}(\angle Q) = 53\text{sen}(38^\circ)$$

$$m \angle Q = \text{sen}^{-1}\left(\frac{53\text{sen}(38^\circ)}{36}\right)$$

$$m \angle Q = 65^\circ$$

- Evalúa el trabajo de los estudiantes en la rúbrica de puntuación (ver anejo: “Organizador - Rúbrica de tarea de desempeño”).



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos

Matemáticas

6 semanas de instrucción

(Fuente: <http://www.amaps.org/leftfiles/Syllabi/Algebra%20%20Sample%20Tasks.pdf>)

Laberinto de triángulo

- Los estudiantes demostrarán su comprensión de la ley de senos y la ley de cosenos por medio de la siguiente tarea en que trabajan como arquitectos paisajistas que han recibido la tarea de diseñar un laberinto al aire libre para un parque de diversiones.
- Tarea:
- El parque de diversiones quiere añadir un laberinto hecho de arbustos por el cual la gente pueda pasear. Han encontrado ejemplos de laberintos en otros parques que están formados por ángulos rectos únicamente, y otros de naturaleza circular. Para ser originales, les gustaría crear su primer laberinto compuesto completamente de formas triangulares sin ángulos rectos.
- Tú, el arquitecto paisajista, debes inventar un plan para hacer un laberinto interesante de 1 acre que esté compuesto de secciones triangulares. Los triángulos estarán bordeados de arbustos altos, y el interior de los triángulos estará cubierto de agua para que la gente no intente saltar por encima de los arbustos. Propón un diseño para esta atracción con medidas de todos los lados y ángulos, así como el área interior de los triángulos. Puedes tener algunos ángulos con las mismas dimensiones, pero asegúrate de que el diseño tenga por lo menos cinco tipos diferentes de triángulos, la variedad suficiente para ser interesantes.
- Procedimiento:
 1. Haz un boceto de tu plan. Antes de finalizarlo, asegúrate de que los caminos que la gente escoja sean variados e interesantes. Algunos deben llevar a callejones sin salida.
 2. Una vez hayas terminado tu diseño, crea una versión final de tu plan con todas las medidas rotuladas, haz varias copias y traza los caminos potenciales que puede tomar la gente por el laberinto, tanto largos como cortos. Estima cuán largos son estos caminos posibles, y estima cuánto tiempo se tomaría recorrerlos a un paso relajado.
 3. Para hacerle la vida más fácil al Departamento de Terrenos, informa la longitud total de verjas de arbustos a las que hay que darle mantenimiento, así como el volumen total de agua en las piscinas que tendrán que mantener. Escribe un párrafo que describa las características del plan de forma tal que sirva para "venderle" tu propuesta al comité del parque.
 4. Incluye todos los cálculos que respalden tu propuesta en un apéndice adjunto al final.
 5. Opcional (puntos de bono) - Da la milla extra y crea una maqueta de tu plan para asegurarte de que el comité entienda tu visión del laberinto.
- Evalúa el trabajo de los estudiantes en la rúbrica de evaluación (ver anejo: "TR.6 Rúbrica del Laberinto de triángulos").

(Fuente: www.curriculumframer.com)



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos

Matemáticas

6 semanas de instrucción

Actividades de aprendizaje sugeridas

Leyes trigonométricas usando mapas

- Los estudiantes utilizan mapas para determinar si hace falta usar leyes trigonométricas y cómo se usan. Presenta un mapa en la pizarra en un proyector, por ejemplo. El mapa deberá tener tres ubicaciones conectadas por tres líneas que NO formen un triángulo rectángulo. Pregúntales a los estudiantes cómo se determinan las distancias o los ángulos. Dígales que mientras las funciones trigonométricas normales no pueden usarse puesto que no hay ángulo rectángulo presente, hay leyes trigonométricas que pueden usarse, y escríbelas en la pizarra. Pregúntales: ¿de dónde salen estas leyes? Muéstrales cómo derivar la ley del seno. Los estudiantes intentarán derivar la ley de coseno con la ayuda del maestro. Pídale a un voluntario que muestre su progreso en la pizarra. Entrégueles una copia de un mapa local con preguntas que incluyan las leyes. Ellos pueden trabajar juntos para resolver los distintos problemas. Antes de que se acabe la clase, los estudiantes deberán completar esta parte en la pizarra. Provéales problemas de práctica en que tengan que aplicar las leyes.

(Fuente: https://mcla.digication.com/5127/Lesson_Plan- Law_of_Sine_and_Cosine)



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos

Matemáticas

6 semanas de instrucción

Ejemplos para planes de la lección

Las leyes de seno y coseno ¡simplificadas!

- Esta actividad está diseñada para expandir el conocimiento de trigonometría usando la ley de senos y la ley de cosenos. Los estudiantes elaborarán una herramienta de trigonometría de triángulos para ayudarlos a visualizar las leyes de trigonometría. A continuación los estudiantes reconstruirán los triángulos por su cuenta, intercambiarán las construcciones con otros grupos y hallarán las soluciones. Corroborarán sus soluciones usando un transportador y una regla de centímetros como herramientas de medir. Necesitarán un pedazo de cartulina de color claro, marcadores rojo/azul/negro, transportador, regla y tijeras. Los estudiantes ya deben conocer el teorema de Pitágoras, así como las relaciones trigonométricas de seno, coseno y tangente con respecto a un triángulo rectángulo.
- Instrucciones:
 1. En esta actividad se les pide a los estudiantes que hagan su propio triángulo no rectángulo y lo completen con un código de colores y razones trigonométricas escritas en su triángulo. Esto les servirá como herramienta instructiva para que la utilicen cuando estén aprendiendo por primera vez sobre la ley de senos y la ley de cosenos.
 - Usando un escalímetro, los estudiantes trazan una línea por el lado diagonal de una cartulina. Se forman así dos triángulos rectángulos congruentes. Recorta por la línea diagonal. Deja un triángulo de lado para usarlo después.
 - Usando un escalímetro, traza una línea por el triángulo rectángulo hasta el lado opuesto, dividiendo así el ángulo recto de forma tal que ya no mida 90° . Los estudiantes deberán tener ahora un triángulo no rectángulo.
 - Usando un marcador rojo, pídeles que rotulen un ángulo “ángulo A”. A continuación, haz que cada estudiante coloree el opuesto del ángulo A con el marcador rojo. Completa el mismo proceso para rotular el ángulo B, y luego el lado opuesto con un marcador azul. A continuación, rotula el ángulo C y el lado opuesto con un marcador negro.
 - Rotula cada ángulo con una letra mayúscula, y el lado opuesto de ese ángulo con la misma letra y color, pero en minúscula.
 - Pídeles que volteen el triángulo y dupliquen las marcas en el dorso.
 - Pídeles que escriban la fórmula de la ley de senos en el centro de un lado del triángulo, y que en el otro lado del triángulo escriban las tres fórmulas de la ley de cosenos.
 2. Provéales triángulos con la medida de un ángulo dada, su lado opuesto (en cm) y otra medida que escojas. Los estudiantes deberán utilizar la ley de senos y la ley de cosenos para solucionar los triángulos.
 3. En parejas o grupos pequeños, los estudiantes dibujarán unos seis triángulos, lo suficientemente grandes como para que ocupen toda la página. Infórmeles que deben dibujar estos triángulos con cuidado y precisión usando un escalímetro.
 - Los estudiantes medirán tres de las 6 partes de cada triángulo y anotarán las medidas a la derecha del dibujo.
 - A continuación, intercambiarán su papel con otro compañero o grupo. En el nuevo papel, los estudiantes deberán hallar las partes que faltan de cada triángulo usando el conocimiento de trigonometría que posean. Pídeles a los estudiantes que muestren todos los pasos del proceso y no dejes que usen las herramientas de medir como muletilla.
 - Una vez los grupos hayan terminado, deben devolver el papel al propietario original.
 - Usando un transportador y una regla de centímetros, pídale al propietario original que corrija las respuestas.

(Fuente: <http://www.uen.org/Lessonplan/preview?LPid=19845>)



Unidad TR.6: Leyes de Senos y Cosenos

Matemáticas

6 semanas de instrucción

Desarrollar ley de cosenos

- Primero, para repasar LAL y LLL, se les dará a los estudiantes varios datos sobre triángulos y se les pedirá que los tracen con regla y transportador. Compararán triángulos entre sí para ver con cuáles conjuntos de datos se obtiene un solo triángulo, así como ver que con ciertos ejemplos de LLL no se obtiene triángulo. Los estudiantes desarrollarán la ley de cosenos como extensión lógica de la fórmula pitagórica y nuestra definición de razón de coseno. A continuación, explorarán los escenarios donde resulte útil, y verán qué sucede cuando intentan aplicarlo a uno de los ejemplos de LLL imposibles de la actividad anterior (ver anejo: “TR.6- Ejemplo para plan de la lección- Desarrollo de la ley de cosenos”).

(Fuente: http://www.mde.k12.ms.us/ACAD/ID/Curriculum/Framer/units/template_233.html)